

**PEMODELAN DAN ANALISA LAYANAN ANTRIAN DI SPBU PERTAMINA
GIWANGAN YOGYAKARTA DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS:
STUDI KASUS DATA EMPIRIS**

Yohannaes Benyamin Sino Par¹⁾, Silvia Manihuruk²⁾, Marcellinus Andy Rudhito³⁾

¹⁾*Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma, Jl. Paingan,
Krodan, Maguwoharjo, Yogyakarta 55281;*

¹⁾yonsipar@gmail.com ²⁾silviamanihuruk24@gmail.com ³⁾rudhito@usd.ac.id

Abstract

This study aims to model and analyze the queuing services at the Pertamina Giwangan Gas Station in Yogyakarta using Max-Plus Algebra. Queuing is a common phenomenon at gas stations, and efficient queue management can enhance customer satisfaction and operational efficiency. The research method involves collecting primary data through observations and interviews to record arrival times, service times, and service procedures at the gas station, which are then analyzed to identify relevant parameters such as inter-arrival times, service times, and the number of service lanes. Max-Plus Algebra is then used as a mathematical tool to analyze the behavior of the queuing system. We collected queuing data at the gas station and identified relevant parameters to construct the model. Subsequently, Max-Plus Algebra was utilized to simulate and analyze the queuing system. The analysis results indicate that understanding queue dynamics using Max-Plus Algebra enables the gas station to optimize service processes and reduce customer waiting times. This study contributes to the development of analysis and modeling methods for queuing systems at gas stations and the practical application of Max-Plus Algebra.

Keywords: *Gas station, Queueing, Modeling, Analysis, Max-Plus Algebra*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dan menganalisis layanan antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta dengan menggunakan Aljabar Max-Plus. Antrian merupakan fenomena yang umum terjadi di SPBU, dan manajemen antrian yang efisien dapat meningkatkan kepuasan pelanggan serta efisiensi operasional SPBU. Metode penelitian melibatkan pengumpulan data primer melalui observasi dan wawancara untuk mencatat waktu kedatangan, pelayanan, serta prosedur layanan di SPBU, yang kemudian dianalisis untuk mengidentifikasi parameter relevan seperti waktu antar kedatangan, waktu pelayanan, dan jumlah jalur layanan. Selanjutnya digunakan Aljabar Max-Plus sebagai alat matematis untuk menganalisis perilaku sistem antrian. Peneliti mengumpulkan data antrian di SPBU tersebut dan mengidentifikasi parameter yang relevan untuk membangun model. Setelah itu, peneliti menggunakan Aljabar Max-Plus untuk mensimulasikan dan menganalisis sistem antrian tersebut. Hasil analisis menunjukkan bahwa dengan memahami dinamika antrian menggunakan Aljabar Max-Plus, SPBU dapat mengoptimalkan proses layanan dan mengurangi waktu tunggu pelanggan. Penelitian ini memberikan kontribusi bagi pengembangan metode analisis dan pemodelan sistem antrian di SPBU serta aplikasi Aljabar Max-Plus dalam konteks praktis.

Kata Kunci : *SPBU, Antrian, Pemodelan, Analisis, Aljabar Max-Plus.*

Cara Menulis Sitasi: Par, Y., B., S, Manihuruk, S & Rudhito, M., Y. (2024). Pemodelan dan analisa layanan antrian di SPBU pertamina Giwangan Yogyakarta dengan menggunakan aljabar Max-plus: Studi kasus data empiris. *Jurnal Edukasi dan Sains Matematika (JES-MAT)*, 10 (2), 129-144.

PENDAHULUAN

Antrian merupakan fenomena yang umum terjadi di berbagai tempat pelayanan publik (Germecca dkk., 2024). Fenomena ini terjadi karena keterbatasan sumber daya yang tersedia, sedangkan jumlah permintaan pelayanan lebih tinggi. SPBU Pertamina Giwangan, Yogyakarta menjadi salah satu contoh tempat dimana fenomena antrian dapat dijumpai. Di tempat ini, sering terlihat antrian panjang kendaraan yang menunggu giliran untuk mengisi bahan bakar, terutama pada jam-jam sibuk atau saat terjadi kelangkaan pasokan.

Untuk meningkatkan efisiensi sistem antrian dan kepuasan pelanggan, manajemen antrian yang menggunakan analisis matematis seperti Aljabar Max-Plus diharapkan menjadi pendekatan yang bermanfaat. Aljabar Max-Plus mungkin memungkinkan optimalisasi jadwal dan urutan pelayanan dengan memperhitungkan waktu tunggu dan kapasitas pelayanan secara lebih akurat. Pendekatan ini dapat berpotensi membantu meningkatkan kinerja sistem antrian dan memberikan pengalaman yang lebih baik bagi pelanggan.

Antrian di tempat pelayanan publik tidak hanya terjadi di SPBU, tetapi juga dapat ditemui di berbagai sektor lainnya, seperti rumah sakit (Narayanamurthy & Tortorella, 2021), bank (Otsetova et al., 2018), kantor pos (Chen et al., 2022), dan tempat-tempat lain yang menyediakan layanan bagi masyarakat umum. Fenomena ini menjadi perhatian penting bagi pengelola layanan, karena antrian yang tidak dikelola dengan baik dapat berdampak negatif pada kepuasan pelanggan dan efisiensi operasional (Germecca et al., 2024).

Penelitian ini bertujuan mengembangkan model matematis sistem

antrian di SPBU Pertamina Giwangan, Yogyakarta menggunakan Aljabar Max-Plus untuk menganalisis kinerja layanan dan mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi efisiensi pelayanan. Melalui pendekatan ini, perilaku sistem antrian di SPBU tersebut akan dieksplorasi secara mendalam, sehingga dapat ditemukan pola dan dinamika yang mempengaruhi waktu tunggu dan kepuasan pelanggan. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan rekomendasi strategi optimalisasi manajemen antrian yang lebih efisien, serta memberikan panduan praktis bagi pengelola SPBU dalam mengimplementasikan solusi yang tepat untuk meningkatkan kualitas layanan.

Dalam artikel ini, akan disajikan tinjauan literatur terkait manajemen antrian, termasuk berbagai pendekatan matematis yang telah digunakan dalam konteks ini. Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan dalam pengembangan metode analisis dan pemodelan sistem antrian di SPBU, sehingga bermanfaat baik secara akademis maupun praktis.

Selain penelitian yang disebutkan sebelumnya, terdapat beberapa studi lain yang juga memanfaatkan Aljabar Max-Plus untuk memodelkan dan mengoptimalkan sistem antrian. Contohnya, ada penelitian yang memodelkan sistem antrian lalu lintas dengan satu underpass di Yogyakarta (Hurit & Ruditho, 2019), penelitian yang menggunakan sistem persamaan linear Aljabar Max-Plus untuk mengoptimalkan waktu produksi makanan khas Madura (Rohani, Suci., dkk. 2018), serta penelitian yang memodelkan sistem antrian pasien rawat jalan menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus (Prasetyo & Widiastuti, R. 2020). Pendekatan Aljabar Max-Plus

dalam pemodelan sistem antrian terbukti efektif untuk mengoptimalkan jadwal, urutan pelayanan, serta memperhitungkan waktu tunggu dan kapasitas layanan secara akurat, sehingga dapat meningkatkan efisiensi dan kepuasan pengguna.

LANDASAN TEORI

SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta

SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta adalah salah satu stasiun pengisian bahan bakar yang berada di Jl. Ringroad Selatan, Kecamatan Umbulharjo, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta. Sebagai bagian dari jaringan SPBU milik Pertamina, stasiun ini menyediakan berbagai jenis bahan bakar, mulai dari pertalite, pertamax, solar dan dexlite yang terbagi dalam 3 pompa bahan bakar. Pompa pertama menyediakan jenis bahan bakar pertamax, pompa kedua menyediakan bahan bakar jenis dexlite dan solar, sementara itu, pompa ketiga menyediakan solar dan pertalite. Dengan penataan ini, SPBU dapat memberikan layanan yang optimal sesuai dengan jenis kendaraan dan kebutuhan bahan bakarnya.

Lokasi strategis SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta menjadikannya pusat aktivitas bagi pemilik kendaraan. Mereka yang melintas atau beraktivitas di sekitar SPBU sering kali mengisi bahan bakar di sana. Oleh karena itu, SPBU ini kerap mengalami antrian, terutama pada jam-jam sibuk dan waktu-waktu tertentu seperti musim liburan atau akhir pekan.

Antrian

Antrian adalah aktivitas menunggu giliran dalam menerima layanan, yang terjadi karena banyaknya pihak yang membutuhkan layanan sementara jumlah pihak atau fasilitas yang melayani terbatas. Sebagaimana dijelaskan oleh Render dan

Heizer (2005:658), antrian adalah orang-orang atau barang dalam barisan yang sedang menunggu untuk dilayani.

Terdapat empat model dasar struktur antrian yang umum terjadi dalam sistem antrian, yaitu:

- *Single Channel – Single Phase*: Sistem ini memiliki satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau hanya ada satu tempat pelayanan.
- *Single Channel – Multi Phase*: Struktur ini memiliki satu jalur pelayanan, tetapi terdapat dua atau lebih tahapan pelayanan yang dilakukan secara berurutan.
- *Multi Channel – Single Phase*: Dalam sistem ini, satu antrian tunggal mengarah ke dua atau lebih fasilitas pelayanan.
- *Multi Channel – Multi Phase*: Model ini memiliki beberapa fasilitas pelayanan di setiap tahap, sehingga memungkinkan lebih dari satu individu untuk dilayani pada saat yang bersamaan.

Antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta

Pengisian bahan bakar di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta mengikuti mekanisme antrian. Antrian di tempat ini terjadi ketika banyak pihak atau kendaraan membutuhkan pelayanan pengisian bahan bakar di SPBU, sementara jumlah fasilitas layanan yang tersedia terbatas, maka antrian pun terbentuk. Hal ini menciptakan suatu sistem di mana kendaraan harus berada dalam barisan, menunggu giliran untuk mendapatkan layanan pengisian bahan bakar yang dibutuhkan.

Model antrian yang digunakan dalam proses ini adalah *Multi Channel –*

Multi Phase. Pengendara memulai antrian berdasarkan jenis bahan bakar yang mereka butuhkan. Dengan demikian, pada waktu yang sama, pengisian bahan bakar untuk berbagai jenis bahan bakar dapat dilakukan secara bersamaan untuk memenuhi kebutuhan pengguna kendaraan.

Manajemen antrian yang efisien di SPBU ini menjadi kunci dalam memastikan pelayanan yang optimal bagi pelanggan serta kelancaran operasional SPBU itu sendiri. Berbagai upaya dan strategi perlu dikembangkan untuk mengatasi antrian dan memastikan pelanggan mendapatkan pelayanan yang cepat dan berkualitas.

Aljabar Max-Plus

Aljabar Max-Plus adalah suatu sistem aljabar yang menggunakan operasi maksimum (max) dan penjumlahan (+) sebagai pengganti dari operasi aritmatika konvensional. Dalam aljabar ini, operasi maksimum menggantikan penjumlahan, sedangkan operasi penjumlahan menggantikan perkalian. Seperti yang dijelaskan dalam Bacelli et al. (2001), Rudhito (2004), dan Krivulin (2001), pemodelan dan analisis suatu jaringan dengan pendekatan Aljabar Max-Plus dapat memberikan hasil analitis yang lebih mudah pada komputasinya.

Dengan Aljabar Max-Plus, proses pemodelan dan analisis jaringan dapat menghasilkan solusi analitis yang lebih mudah dipahami dan diimplementasikan. Hal ini karena Aljabar Max-Plus memungkinkan representasi matematis dari properti jaringan dengan menggunakan operasi dasar seperti penjumlahan dan pembandingan maksimum, yang relatif lebih sederhana dibandingkan dengan metode-metode lain yang lebih kompleks.

Operasi maksimum, yang disimbolkan dengan \oplus , menggantikan fungsi penjumlahan. Contohnya, untuk dua bilangan a dan b , operasi maksimum didefinisikan sebagai:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

Operasi penjumlahan, yang disimbolkan dengan \otimes , menggantikan fungsi perkalian. Jika diberikan dua bilangan a dan b , operasi penjumlahan didefinisikan sebagai:

$$a \otimes b = a + b$$

Didefinisikan $\varepsilon = -\infty$ merupakan elemen netral sementara $e = 0$ merupakan elemen satuan. Kemudian untuk mendapatkan suatu nilai periodik maka iterasi $x(k+1) = d \otimes x(k)$ hingga ada bilangan bulat x, q dengan $x > q \geq 0$ dan sebuah bilangan riil c sehingga $x(p) = x(q) \otimes c$.

Aljabar Max-Plus memiliki berbagai aplikasi dalam pemodelan sistem dinamis, termasuk dalam analisis sistem antrian, jaringan komunikasi, jadwal produksi, dan optimasi proses. Kelebihan Aljabar Max-Plus adalah kemampuannya untuk menangani sistem yang kompleks dengan cara yang efisien dan elegan, sering kali menghasilkan solusi analitis yang dapat dihitung dengan cepat.

Keunggulan dan Manfaat dari Pendekatan Aljabar Max-Plus

Aljabar Max-Plus dipilih untuk memodelkan dan menganalisis layanan antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta. Pendekatan aljabar Max-Plus memiliki sejumlah keunggulan dan manfaat yang signifikan, terutama dalam konteks sistem antrian dan pengoptimalan operasional. Berikut ini adalah beberapa keunggulan dan manfaat utama:

1. Komputasi yang efisien

Aljabar Max-Plus menggunakan operasi maksimal dan penjumlahan yang relatif sederhana dan efisien untuk dihitung. Ini menjadikan Aljabar Max-Plus sebagai alat yang sangat cocok untuk pemodelan sistem kompleks dengan komputasi yang cepat dan mudah.

2. Optimalisasi antrian

Dengan menggunakan Aljabar Max-Plus, waktu tunggu dalam sistem antrian dapat diminimalkan melalui penjadwalan yang optimal dan pengelolaan yang baik. Ini sangat bermanfaat dalam meningkatkan efisiensi pelayanan di SPBU.

3. Alokasi sumber daya optimal

Aljabar Max-Plus membantu dalam pengalokasian sumber daya secara optimal, seperti waktu, ruang atau tenaga kerja.

4. Pengendalian yang lebih efektif

Pendekatan Aljabar Max-Plus memungkinkan prediksi yang lebih baik, menyediakan alat untuk pengendalian yang lebih efektif, di mana pengelola dapat membuat keputusan yang lebih informasional dan responsif terhadap perubahan kondisi.

Aplikasi Aljabar Max-Plus pada Model Antrian di SPBU

Misalkan kita memiliki sebuah SPBU dengan satu jalur pelayanan. Kendaraan datang pada interval waktu tertentu, dan setiap kendaraan membutuhkan waktu pelayanan yang berbeda-beda. Dengan menggunakan Aljabar Max-Plus, kita dapat memodelkan kedatangan dan pelayanan kendaraan dalam bentuk persamaan yang memungkinkan kita menghitung waktu mulai dan selesai pelayanan dengan lebih efisien.

Langkah-langkah Pemodelan Antrian Menggunakan Aljabar Max-Plus:

1. Definisi Variabel

Misalkan x_i mewakili waktu mulai proses ke-I dan d_i mewakili lamanya waktu proses ke-i.

2. Persamaan Max-Plus untuk Antrian

Waktu mulai proses ke-i pada langkah berikutnya $x_i(k + 1)$ adalah jumlah dari waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan proses ke-i (d_i) dan waktu mulai proses tersebut pada langkah sebelumnya ($x_i(k)$). Ini menunjukkan bahwa untuk memulai proses ke-iii pada langkah berikutnya, kita harus menambahkan lamanya waktu yang dibutuhkan untuk proses tersebut (dari langkah sebelumnya) ke waktu saat proses dimulai sebelumnya. Persamaan ini bisa ditulis sebagai: $x_0(k + 1) = d_0 \otimes x_0(k)$

Dengan x_0 asumsi awal, pelayanan dimulai pada waktu 0.

Contoh implementasi:

Misalkan kendaraan 1, 2, dan 3 dengan waktu pelayanan berturut-turut: $d_1 = 3$ menit $d_2 = 5$ menit dan $d_3 = 4$ menit. Serta dimisalkan pula kendaraan pertama tiba pada waktu $x_1(0)$ (dimulai dari waktu nol).

Kita ingin menghitung waktu mulai pelayanan (x_i) untuk setiap kendaraan pada langkah-langkah berikutnya. Waktu selesai pelayanan untuk kendaraan pertama: $x_1(1) = d_1 \otimes x_1(0) = 0 + 3 = 3$.

Kendaraan kedua mulai dilayani segera setelah kendaraan pertama selesai, sehingga waktu mulai pelayanan untuk kendaraan kedua sama dengan waktu selesai pelayanan untuk kendaraan pertama. Kemudian waktu selesai pelayanan untuk

kendaraan kedua: $x_2(2) = d_2 \otimes x_2(1) = 8 + 5 = 8$. Kendaraan ketiga mulai dilayani segera setelah kendaraan kedua selesai, sehingga waktu mulai pelayanan untuk kendaraan ketiga sama dengan waktu selesai pelayanan untuk kendaraan kedua. Kemudian waktu selesai pelayanan untuk kendaraan ketiga: $x_3(3) = d_3 \otimes x_3(2) = 8 + 4 = 12$. Dengan menggunakan Aljabar Max-Plus, kita telah memodelkan urutan waktu pelayanan untuk setiap kendaraan di SPBU. Model ini menunjukkan kapan setiap kendaraan mulai dan selesai dilayani, memungkinkan kita untuk memahami dinamika antrian dan potensi waktu tunggu.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan studi kasus yang mengadopsi jenis penelitian kuantitatif deskriptif dengan pendekatan matematis menggunakan Aljabar Max-plus. Pendekatan kuantitatif memungkinkan peneliti untuk mengukur berbagai parameter antrian seperti waktu tunggu dan waktu layanan secara objektif. Selanjutnya pendekatan deskriptif digunakan untuk menggambarkan kondisi dan dinamika antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta. Dengan jenis penelitian ini, diharapkan dapat diperoleh pemahaman yang mendalam tentang dinamika antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta. Dengan demikian kinerja pelayanannya dapat dianalisis dan selanjutnya dilakukan pengidentifikasian terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi efisiensi pelayanan solusi berbasis data yang dapat meningkatkan kualitas layanan dan mengurangi waktu tunggu pelanggan.

Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan selama kurang lebih sebulan yakni pada bulan Mei 2024. Lama waktu ini sudah menjadi target yang ditetapkan sejak awal perencanaan dan setelah penelitian ini diselesaikan waktu yang tersedia cukup untuk memenuhi segala kebutuhan penelitian. Penelitian dilaksanakan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta.

Subjek Penelitian

Penelitian ini memiliki beberapa sasaran utama yang dapat memberikan kontribusi signifikan dalam manajemen antrian di SPBU. Sasaran penelitian ini mencakup:

1. **Pemodelan Dinamika Antrian.**
Mengembangkan model matematis yang akurat dari sistem antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta menggunakan Aljabar Max-Plus. Model ini akan membantu dalam memahami pola antrian dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.
2. **Analisis Efisiensi Pelayanan.**
Menganalisis efisiensi pelayanan di SPBU berfokus pada waktu tunggu pelanggan dan kapasitas layanan yang ada. Hal tersebut dilakukan untuk mengidentifikasi *bottleneck* dalam proses layanan dan mengusulkan solusi untuk mengatasinya.
3. **Rekomendasi Peningkatan Layanan.**
Menyusun rekomendasi praktis yang dapat diimplementasikan oleh manajemen SPBU guna meningkatkan efisiensi dan kualitas layanan, berdasarkan hasil analisis dan simulasi model antrian.

Subjek penelitian mencakup elemen-elemen berikut yang berhubungan secara langsung dengan dinamika antrian di SPBU:

1. Kendaraan yang Mengantri
Semua jenis kendaraan yang mengantri untuk mengisi bahan bakar di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta selama periode penelitian. Ini termasuk sepeda motor, mobil pribadi, dan kendaraan komersial.
2. Waktu Kedatangan dan Pelayanan
Data mengenai waktu kedatangan kendaraan di SPBU dan durasi pelayanan untuk setiap kendaraan. Ini mencakup informasi mengenai waktu mulai dan selesai proses pengisian bahan bakar.
3. Petugas SPBU
Peran petugas SPBU dalam proses layanan, termasuk efisiensi dan kecepatan layanan yang mereka berikan kepada pelanggan.
4. Fasilitas SPBU
Kondisi dan kapasitas fasilitas di SPBU, seperti jumlah pompa yang tersedia, distribusi pompa berdasarkan jenis bahan bakar, dan jam operasional SPBU.
5. Kondisi Lingkungan
Faktor-faktor lingkungan yang dapat mempengaruhi antrian, seperti waktu hari (pagi, siang, sore, malam), hari dalam minggu (hari kerja atau akhir pekan), dan kondisi cuaca.

Prosedur

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini mencakup serangkaian langkah-langkah yang sistematis:

1. Perencanaan dan Persiapan
 - Pengumpulan informasi terkait gambaran umum tentang sistem antrian di SPBU Pertamina Giwangan, termasuk jam sibuk, waktu tunggu rata-rata, dan kapasitas layanan.

- Pengaturan kerangka penelitian
Terkait tujuan penelitian, pertanyaan penelitian, dan hipotesis yang akan diuji.
 - Pengumpulan sumber daya atau peralatan yang dibutuhkan untuk pengumpulan dan analisis data.
2. Pengumpulan Data
 - Observasi lapangan di SPBU untuk mencatat waktu kedatangan kendaraan, waktu layanan, dan panjang antrian.
 - Pencatatan data secara manual menggunakan formulir pencatatan yang telah disiapkan.
 - Pengambilan sampel yang representatif dari berbagai waktu dan kondisi untuk memastikan data yang komprehensif.
 3. Analisis Data Awal
 - Pengolahan data dengan memasukkan data ke dalam perangkat lunak analisis untuk membersihkan, mengelompokkan, dan menyusun data.
 - Analisis deskriptif terkait pola dan distribusi waktu antrian serta waktu layanan.
 4. Pemodelan dengan Aljabar Max-Plus
 - Definisi variabel dan parameter yang relevan untuk model antrian menggunakan Aljabar Max-Plus.
 - Pembangunan model matematis dari sistem antrian menggunakan Aljabar Max-Plus, termasuk waktu antara kedatangan kendaraan, waktu layanan, dan jumlah kendaraan yang mengantri.
 5. Simulasi dan Analisis
 - Simulasi model yang dibangun untuk memahami perilaku antrian di SPBU Pertamina Giwangan.

- Analisis hasil simulasi untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi waktu tunggu, kapasitas layanan, dan efisiensi operasional SPBU.
6. Interpretasi dan Penyusunan Laporan
 - Interpretasi hasil temuan dari analisis untuk mendapatkan pemahaman yang mendalam tentang dinamika antrian di SPBU.
 - Penyusunan laporan penelitian yang mencakup deskripsi metodologi, hasil analisis, kesimpulan, dan rekomendasi untuk manajemen SPBU.
 7. Validasi dan Presentasi
 - Validasi model untuk membandingkan hasil simulasi dengan data lapangan untuk memvalidasi keakuratan model.
 - Membuat presentasi hasil untuk menyampaikan temuan penelitian kepada pembimbing kegiatan pihak-pihak terkait lainnya.
 8. Evaluasi dan Revisi
 - Evaluasi kembali metodologi dan temuan penelitian untuk menentukan kekurangan dan peluang penelitian selanjutnya.
 - Revisi pada laporan dan metodologi penelitian berdasarkan umpan balik dan hasil evaluasi.

Data, Instrumen, dan Teknik Pengumpulan Data

Data yang dikumpulkan meliputi data kualitatif dan kuantitatif terkait waktu antara kedatangan kendaraan ke SPBU, waktu pelayanan untuk setiap kendaraan, jumlah kendaraan dalam antrian, dan data demografis atau profil pelanggan SPBU. Data ini akan memberikan informasi yang diperlukan untuk menganalisis layanan

antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta.

Instrumen yang digunakan dalam pengumpulan data meliputi catatan observasi dan semi-terstruktur. Catatan observasi akan digunakan untuk mencatat waktu kedatangan kendaraan, waktu pelayanan, dan jumlah kendaraan dalam antrian secara sistematis. Sementara itu, wawancara akan dilakukan dengan pelanggan dan petugas SPBU untuk mendapatkan wawasan dan persepsi mereka terkait dengan layanan antrian.

Teknik pengumpulan data yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

- Catatan Observasi
Teknik ini melibatkan pengamatan langsung terhadap proses antrian di SPBU. Pengamat akan mencatat waktu kedatangan kendaraan, waktu pelayanan, dan jumlah kendaraan dalam antrian secara kronologis.
- Wawancara Semi-Terstruktur
Teknik ini akan melibatkan wawancara dengan pelanggan dan petugas SPBU. Pertanyaan terstruktur atau semi-terstruktur akan diajukan untuk mendapatkan informasi tentang persepsi, pengalaman, dan pandangan mereka terkait dengan layanan antrian di SPBU.

Dengan menggunakan instrumen dan teknik pengumpulan data yang disebutkan di atas, peneliti akan dapat mengumpulkan data yang diperlukan untuk menganalisis dan memodelkan layanan antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta.

Teknik Analisis Data

Data yang dikumpulkan meliputi data kualitatif dan kuantitatif dengan teknik

pengumpulan data melibatkan catatan observasi dan wawancara semi-terstruktur dengan pelanggan dan petugas SPBU. Data ini kemudian dianalisis menggunakan Aljabar Max-Plus yang kuat untuk memodelkan perilaku antrian secara matematis.

Dalam analisis menggunakan Aljabar Max-Plus, diidentifikasi pola antrian yang terjadi di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta, pengestimasi waktu tunggu yang dihadapi pelanggan, dan diperoleh pemahaman yang lebih baik tentang performa sistem antrian. Aljabar Max-Plus memungkinkan menggambarkan aliran kendaraan dalam antrian, waktu pelayanan, dan waktu antara kedatangan kendaraan dengan menggunakan operasi matematika yang kuat. Dengan memodelkan sistem antrian menggunakan Aljabar Max-Plus, dapat dilakukan simulasi dan analisis untuk mengidentifikasi potensi perbaikan dalam layanan antrian di SPBU tersebut.

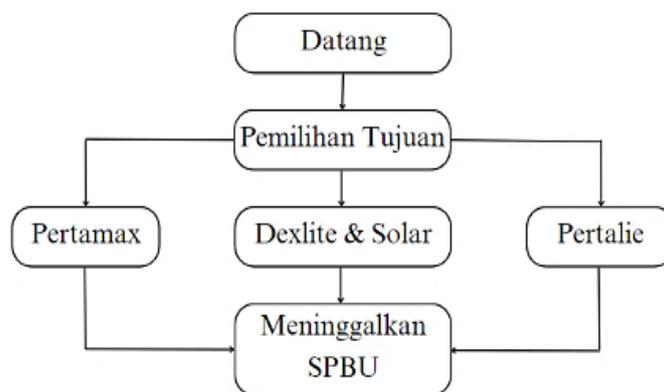
Hasil analisis menggunakan Aljabar Max-Plus akan membantu dalam memahami dinamika antrian, mengidentifikasi *bottleneck*, dan mengevaluasi efektivitas strategi manajemen antrian yang diusulkan. Selain itu, analisis data historis juga dapat

digunakan untuk memvalidasi model matematis dan meningkatkan akurasi prediksi kinerja layanan di masa mendatang.

Dengan pendekatan yang inovatif ini, artikel ini memberikan kontribusi pada pemahaman tentang layanan antrian di SPBU dan menyajikan Aljabar Max-Plus sebagai alat yang efektif dalam menganalisis dan memodelkan sistem antrian. Diharapkan bahwa temuan dan rekomendasi yang dihasilkan dari artikel ini akan berguna dalam meningkatkan pengalaman pelanggan serta efisiensi operasional di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Sebagai salah satu titik penting dalam distribusi bahan bakar di Yogyakarta, SPBU Pertamina Giwangan tidak hanya menjadi tempat pengisian bahan bakar kendaraan, tetapi juga pusat aktivitas yang vital bagi masyarakat sekitar. Berdasarkan hasil penelitian, ditemukan bahwa secara umum alur pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta melalui beberapa tahapan seperti ditunjukkan pada bagan berikut.



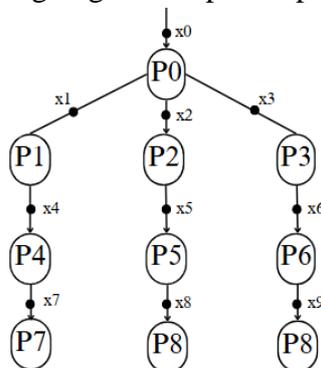
Gambar 1. Tahapan Pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta

Dari tahapan pelayanan pada gambar 1, terlihat bahwa alur pelayanan di SPBU Giwangan Yogyakarta dimulai dari proses pelanggan datang atau masuk ke area SPBU. Pengendara yang data selanjutnya menuju pompa bahan bakar sesuai bahan bakar yang ingin diisi yakni pertamax, dexlite, solar, dan pertalite yang dilayani pada 3 pompa bahan bakar. Oleh karena itu antrian terjadi dalam 3 jalur. Pompa yang melayani pertalite di SPBU Giwangan Yogyakarta juga bisa melayani pengisian solar, namun ketika penelitian ini dilakukan pelayanannya hanya diperuntukan bagi pengisian pertalite. Hal ini sesungguhnya merupakan kondisi yang juga dibutuhkan peneliti sehingga dapat dilihat banyak antrian untuk setiap jenis bahan bakar yang berbeda di setiap jalur antrian. Meskipun demikian hal belum bisa berlaku untuk jalur solar dan dexlite karena keduanya masih didistribusikan oleh satu pompa yang sama maka dianggap sebagai satu kesatuan. Ketika hendak melakukan pengisian, jika terdapat pengendara lain yang sedang melakukan pengisian maka pengendara lain menunggu gilirannya dalam antrian. Ketika mendekati giliran pengendara segera melakukan persiapan seperti membuka jok dan membuka tutup tangki kendaraan. Jika sudah sampai pada giliran pengisian maka pengendara akan melaporkan jenis bahan bakar yang ingin

diisi dan jumlahnya maka petugas SPBU (pompong) akan mengisi bahan bakar sesuai dengan permintaan pengendara. Setelah pengisian selesai maka pengendara akan melakukan pembayaran dan menutup tangki kendaraannya lalu bergegas meninggalkan SPBU.

Setiap proses memiliki estimasi waktu penyelesaian (dalam menit) yang disimbolkan sebagai d-indeks. Catatan waktu ini diperoleh melalui perhitungan rata-rata waktu untuk setiap proses dan dilakukan peneliti saat melakukan pengamatan di lokasi. Sementara waktu suatu proses dimulai disimbolkan dengan t-indeks. Kedua indeks ini juga akan digunakan dalam pevisualisasian petri net. Seperti yang dijelaskan oleh Subiono (2015:129), dalam pemodelan Petri net yang mempertimbangkan waktu, terdapat dua variabel yang digunakan dalam Aljabar Max-Plus, yaitu variabel waktu dan variabel yang menunjukkan lamanya waktu yang dibutuhkan untuk setiap kejadian.

Melalui data hasil pengamatan, tahapan pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta dapat disajikan melalui Petri Net. Dengan menggunakan Aljabar Max-Plus, pemodelan Petri Net tersebut dapat mempresentasikan variabel waktu dan lamanya waktu yang dibutuhkan untuk setiap kejadian yang terjadi dalam proses pelayanan di SPBU tersebut.



Gambar 2. Petri Net Sistem Pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta

Gambar 2 menyajikan dengan jelas tahapan-tahapan pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta. Dari bagan pada gambar 2, selanjutnya dilakukan pemodelan terhadap persamaan-persamaan dengan menggunakan Aljabar Max-Plus. Langkah ini memungkinkan untuk menggambarkan secara matematis

interaksi antar elemen-elemen dalam tahapan layanan. Berikut ini disajikan tabel keterangan variabel-variabel indeks pada gambar 2 yang menunjukkan proses, waktu mulai dan lama waktu dalam menjalankan setiap prosesnya beserta nilai rata-rata waktunya.

Tabel 1. Tahapan Pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta

| Variabel | Keterangan | Waktu (Menit) |
|----------|---|---------------|
| P_0 | Pengendara datang | - |
| P_1 | Antrian pertamax | - |
| P_2 | Antrian dexlite/ solar | - |
| P_3 | Antrian pertalite | - |
| P_4 | Dilayani Pompong pertamax | - |
| P_5 | Dilayani Pompong dexlite dan solar | - |
| P_6 | Dilayani Pompong pertalite | - |
| P_7 | Meninggalkan pom pertamax | - |
| P_8 | Meninggalkan pom dexlite dan solar | - |
| P_9 | Meninggalkan pom pertalite | - |
| d_0 | Lamanya proses pengendara datang | 1 |
| d_1 | Lamanya antrian Pertamax | 7 |
| d_2 | Lamanya antrian dexlite/ solar | 5 |
| d_3 | Lamanya antrian pertalite | 10 |
| d_4 | Lamanya pengendara dilayani Pompong pertamax | 4 |
| d_5 | Lamanya pengendara dilayani Pompong dexlite/ solar | 5 |
| d_6 | Lamanya pengendara dilayani Pompong pertalite | 4 |
| d_7 | Lamanya proses meninggalkan pom pertamax | 1 |
| d_8 | Lamanya proses meninggalkan pom dexlite dan solar | 1 |
| d_9 | Lamanya proses meninggalkan pom pertalite | 1 |
| x_0 | Waktu mulai pengendara datang | - |
| x_1 | Waktu mulai Antrian Pertamax | - |
| x_2 | Waktu mulai Antrian Dexlite/ Solar | - |
| x_3 | Waktu mulai Antrian Pertalite | - |
| x_4 | Waktu mulai pengendara dilayani Pompong Pertamax | - |
| x_5 | Waktu mulai pengendara dilayani Pompong Dexlite/ Solar | - |
| x_6 | Waktu mulai pengendara dilayani Pompong Pertalite | - |
| x_7 | Waktu pengendara mulai meninggalkan pom pertamax | - |
| x_8 | Waktu pengendara mulai meninggalkan pom dexlite dan solar | - |
| x_9 | Waktu pengendara mulai meninggalkan pom pertalite | - |

Dari variabel-variabel yang telah diperoleh, yaitu waktu dan variabel yang menunjukkan durasi waktu, selanjutnya dibuat proses penyusunan model sistem antrian untuk pelayanan pengisian bahan bakar bagi pelanggan. Proses ini menggunakan Aljabar Max-Plus berdasarkan petri net pada gambar 2.

- $x_0(k + 1) = d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_1(k + 1) = d_1 \otimes x_0(k + 1)$
 $= d_1 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_2(k + 1) = d_2 \otimes x_0(k + 1)$
 $= d_2 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_3(k + 1) = d_3 \otimes x_0(k + 1)$
 $= d_3 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_4(k + 1) = d_4 \otimes x_1(k + 1)$
 $= d_4 \otimes d_1 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_5(k + 1) = d_5 \otimes x_2(k + 1)$
 $= d_5 \otimes d_2 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_6(k + 1) = d_6 \otimes x_3(k + 1)$
 $= d_6 \otimes d_3 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_7(k + 1) = d_7 \otimes x_4(k + 1)$
 $= d_7 \otimes d_4 \otimes d_1 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_8(k + 1) = d_8 \otimes x_5(k + 1)$
 $= d_8 \otimes d_5 \otimes d_2 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$
- $x_9(k + 1) = d_9 \otimes x_6(k + 1)$
 $= d_9 \otimes d_6 \otimes d_3 \otimes d_0 \otimes x_0(k)$

dengan $k = 1, 2, 3, \dots$

Persamaan-persamaan diatas selanjutnya dipresentasikan dalam bentuk matriks. Untuk menyusun matriks, terlebih dahulu ditulis persamaan sebelumnya dalam bentuk matrik.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{matrix} x_0(k+1) & x_1(k+1) & x_2(k+1) & x_3(k+1) & x_4(k+1) & x_5(k+1) & x_6(k+1) & x_7(k+1) & x_8(k+1) & x_9(k+1) \\ x_0(k) & x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) & x_4(k) & x_5(k) & x_6(k) & x_7(k) & x_8(k) & x_9(k) \end{matrix} \right] \\
 & = \left[\begin{matrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix} \right] \\
 & \otimes \left[\begin{matrix} x_0(k) & x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) & x_4(k) & x_5(k) & x_6(k) & x_7(k) & x_8(k) & x_9(k) \end{matrix} \right]
 \end{aligned}$$

Di sini, $-\infty$ menunjukkan bahwa tidak ada hubungan langsung antara variabel tersebut. Maka matriks A dalam konteks Max-Plus Aljabar akan terlihat sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai d yang diketahui, diperoleh matriks A sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 18 & 6 & 11 & 12 & 11 & 15 & 13 & 12 & 16 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Nilai A selanjutnya dihitung menggunakan *scilab* dengan waktu awal $X_0 = 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0$ dan k sampai 15 diperoleh hasil sebagai berikut:

Melalui perhitungan menggunakan *scilab* diperoleh juga nilai eigen 1 dan vektor eigen [1,8,6,11,12,11,15,13,12,16].

Dengan model matriks yang diperoleh, selanjutnya dilakukan analisis secara lebih mendalam. Analisis dilakukan untuk memahami bagaimana setiap proses dalam antrian saling mempengaruhi berdasarkan prinsip Aljabar Max-Plus.

Jenis bahan bakar yang sering dibutuhkan oleh pelanggan cenderung menyebabkan waktu pelayanan yang lebih lama, terutama selama proses antrian. Selain itu, jumlah bahan bakar yang dibutuhkan oleh setiap kendaraan juga mempengaruhi lamanya waktu antrian bagi pengendara lain. Dengan demikian, dua faktor utama yang mempengaruhi waktu pelayanan di SPBU ini adalah jenis bahan bakar yang banyak dibutuhkan dan jumlah bahan bakar yang dibutuhkan oleh setiap kendaraan.

Proses pengisian bahan bakar yang berbeda tidak saling mempengaruhi satu sama lain. Setiap jenis bahan bakar memiliki jalur pengisian tersendiri, sehingga interaksi hanya terjadi di dalam proses pengisian untuk masing-masing jenis bahan bakar. Dalam pemodelan dengan Aljabar Max-Plus, hal ini terbukti pada matriks yang dihasilkan. Matriks tersebut menunjukkan bahwa komponen pada kolom 2 sampai 9 hanya diisi dengan nilai $-\infty$, yang mengindikasikan tidak

adanya pengaruh antar proses pengisian bahan bakar yang berbeda.

Hasil temuan ini coba diterapkan dalam suatu kondisi nyata. Dimisalkan bahwa sebuah kendaraan mula memasuki SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta pada pukul 07.00. Akan diperkirakan waktu paling lambat dan paling cepat kendaraan tersebut keluar dari SPBU.

Penyelesaian dimulai dengan mensubstitusikan model Aljabar Max-Plus dengan nilai d_1 sampai d_9 sesuai catatan waktu rata-rata pada tabel 1 sebelumnya dan juga nilai $x_0(k) = 0$ karena waktu awal tepat pukul 07.00 sehingga patokan menit awalnya adalah 0.

- $x_0(k + 1) = 1 + 0 = 1$
- $x_1(k + 1) = 8 + 0 = 8$
- $x_2(k + 1) = 6 + 0 = 6$
- $x_3(k + 1) = 11 + 0 = 11$
- $x_4(k + 1) = 12 + 0 = 12$
- $x_5(k + 1) = 11 + 0 = 11$
- $x_6(k + 1) = 15 + 0 = 15$
- $x_7(k + 1) = 13 + 0 = 13$
- $x_8(k + 1) = 12 + 0 = 12$
- $x_9(k + 1) = 16 + 0 = 16$

Selanjutnya untuk mencari waktu keluarnya kendaraan maka akan digunakan $x_7(k + 1)$, $x_8(k + 1)$, dan $x_9(k + 1)$ karena ketiganya merupakan waktu paling akhir untuk semua proses yang terjadi. Oleh karena itu maka waktu awal akan dijumlahkan dengan ketiga nilai yang diperoleh sebelumnya.

- $07:00 + 13 \text{ menit} = 07:13$
- $07:00 + 12 \text{ menit} = 07:12$
- $07:00 + 16 \text{ menit} = 07:16$

Jadi, kemungkinan perkiraan waktu paling cepat kendaraan tersebut meninggalkan SPBU adalah pada pukul 07.12, yaitu jika bahan bakar yang diisi adalah solar atau dexlite. Sementara itu, kemungkinan perkiraan waktu paling

lambat kendaraan tersebut meninggalkan SPBU adalah pada pukul 07.16, yaitu jika bahan bakar yang diisi adalah solar atau pertalite.

Contoh di atas memperjelas analisis terkait pelayanan di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta dengan menggunakan model Aljabar Max-Plus yang memungkinkan prediksi dan pemahaman tentang bagaimana setiap jenis bahan bakar mempengaruhi durasi pelayanan. Jenis bahan bakar yang diisi sangat berpengaruh terhadap lamanya waktu pelayanan di SPBU, dimana solar atau dexlite membutuhkan waktu pengisian yang lebih singkat sehingga kendaraan dapat meninggalkan SPBU lebih cepat, sementara pengisian pertalite memerlukan waktu lebih lama, mengakibatkan kendaraan meninggalkan SPBU lebih lambat. Kondisi ini menunjukkan bahwa kebutuhan akan pertalite adalah yang terbesar.

SIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini berhasil mengembangkan model matematis sistem antrian di SPBU Pertamina Giwangan, Yogyakarta dengan menggunakan Aljabar Max-Plus. Hasil analisis menunjukkan bahwa dua faktor utama yang mempengaruhi efisiensi waktu pelayanan di SPBU adalah jenis bahan bakar yang banyak dibutuhkan dan jumlah bahan bakar yang diisi oleh setiap kendaraan. Jenis bahan bakar seperti pertalite cenderung menyebabkan waktu pelayanan yang lebih lama, sementara solar atau dexlite memerlukan waktu pengisian yang lebih singkat. Model Aljabar Max-Plus yang digunakan memperlihatkan bahwa proses pengisian bahan bakar yang berbeda memiliki jalur pengisian tersendiri dan tidak saling mempengaruhi satu sama lain.

Secara keseluruhan, penelitian ini memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang dinamika antrian di SPBU Pertamina Giwangan, Yogyakarta dan faktor-faktor yang mempengaruhi efisiensinya. Dengan pemahaman ini, manajemen SPBU dapat meningkatkan efisiensi operasional dan kepuasan pelanggan dengan beberapa langkah konkret, misalnya dengan menambah jalur layanan khusus untuk pertalite dapat mengurangi kemacetan dan waktu tunggu, mengingat kebutuhan akan bahan bakar ini yang tinggi dan waktu pengisiannya yang lebih lama. Selanjutnya, pengaturan penjadwalan yang optimal berdasarkan jenis bahan bakar dapat mengurangi antrian panjang, dengan melayani bahan bakar yang membutuhkan waktu singkat seperti solar pada jam-jam sibuk dan pertalite pada jam non-puncak. Artinya bahwa analisis ini dapat memberikan wawasan berharga untuk dijadikan dasar dalam perencanaan dan pengelolaan operasional yang lebih baik di SPBU, guna meningkatkan kepuasan pelanggan dan efisiensi pelayanan.

DAFTAR PUSTAKA

- Chen, Z., Li, X., & Wang, Y. (2022). Analysis of queuing systems in post offices. *Journal of Service Management*, 35(1), 89-103.
- De Schutter, B., & Bonomi, S. (2022). *Max-plus algebra and its application in scheduling and queuing systems*. *Journal of Control and Decision*, 9(1), 1-22.
- Germecca, M., Zerbini, L., & Zanella, A. (2024). Reducing waiting times in public service facilities through a hybrid AI-driven approach. *Annals of Operations Research*, 318(1), 45-60.

- Germecca, T., Rahardja, U., Nuryani, D., & Sutardi, D. (2024). Antrian dalam Pelayanan Publik: Studi Kasus di Indonesia. *Jurnal Pelayanan Publik Indonesia*, 15(2), 123-136.
- Germecca, L., Smith, J., & Kline, P. (2024). Understanding public service queues: A comprehensive study. *Public Administration Review*, 46(2), 203-217.
- Hurit, S., & Ruditho, R. (2019). Memodelkan sistem antrian lalu lintas dengan satu underpass di Yogyakarta. *Transportation Research Record*, 36(4), 102-118.
- Jambul, G., & Fanggidae, J. (2019). Jadwal Pelayanan Sistem Antrean 5 Server dalam Aljabar Max-Plus Interval. *Jurnal Barekeng*, 13(2), 59-70.
- Kumar, P., & Jain, S. (2023). *Application of max-plus algebra in real-time traffic signal control. Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 141, 103621.
- Li, X., & Zhao, Y. (2021). *Max-plus algebra for dynamic scheduling in manufacturing systems: A survey. International Journal of Production Economics*, 232, 108036.
- Narayanamurthy, G., & Tortorella, G. L. (2021). Hospital queuing systems: Challenges and solutions. *International Journal of Health Care Quality Assurance*, 34(3), 245-261.
- Nawar, Wa., Rahakbauw, D. L., & Patty, D. (2024). *Penjadwalan Waktu Proses Produksi Tahu Menggunakan Pendekatan Aljabar Max-Plus. Studi Kasus: Pabrik Sumber Rizki*.
- Otsetova, A., Genchev, E., & Staneva, V. (2018). Queuing theory and its application in banking sector. *Banking and Finance Review*, 25(2), 78-95.
- Prasetyo, T., & Widiastuti, R. (2020). Pemodelan sistem antrian pasien rawat jalan menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. *Healthcare Management Science*, 18(2), 150-162.
- Rohani, Suci., dkk. (2018). Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus untuk Mengoptimalkan Waktu Produksi Otok Goreng Khas Madura. *Zeta –Math Journal*, Volume 4 No. 1.
- Santos, J., & Rodrigues, M. (2020). *Max-plus algebra applications in service operations management: A review. Operations Research Perspectives*, 7, 100173.

