NEAR-RING PRIMA DAN SEMIPRIMA YANG DILENGKAPI DENGAN DERIVATIF

Ningrum Astriawati
Jurusan Teknika, Akademi Maritim Yogyakarta
e-mail: astriamath@gmail.com

ABSTRACT

Let N be a semiprime near-ring with d derivations of N. Derivations are referred to group additive endomorphism with multiplication operating of $d(x.y) = xd(y) + d(x)y = 0$ for each $x, y \in N$. This paper gives sufficient conditions on a subset near-ring order derivation of each of its members is equal to 0. Let N be a semiprime near-ring and $A \subseteq N$ such that $0 \in A, A.N \subseteq A$ and d derivation of N. The purpose of this paper is to prove that if d acts as a homomorphism on A or as an anti-homomorphism on then $d(A) = 0$

Keywords: Near-Ring Prime, Near-Ring Semiprime, Ideal, Derivations, Homomorphism, anti-homomorphism

PENDAHULUAN

Di dalam aljabar terdapat struktur menyerupai ring, yaitu struktur yang dibentuk dari sebarang grup terhadap operasi penjumlahan, semigrup terhadap operasi pergandaan dan memenuhi sifat distributif terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan. Namun sifat distributif disini hanya dipenuhi satu sisi saja. Struktur inilah yang dikenal dengan nama near-ring.

Topik tentang keprimaan disini juga merupakan salah satu kajian dalam teori ring. Salah satu contoh ring adalah himpunan fungsi-fungsi diferensiabel dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dengan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

Himpunan fungsi-fungsi diferensi-abel tersebut dinotasikan dengan:

$$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f\ diferensiabel\}$$

Misalkan dibentuk suatu pemetaan $\varphi : D \to D$ dengan aturan $\varphi(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)$. Operasi penjumlahan dan perga-ndaan pada D disini mempunyai sifat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) &= \frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]\\ &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\\ &= \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) \qquad (1.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(f(x).g(x)) &= \frac{d}{dx}[f(x).g(x)]\\ &= f(x).\frac{d}{dx}g(x) + \\ &\quad \frac{d}{dx}f(x).g(x)\\ &= f(x).\varphi(g(x)) + \\ &\quad \varphi(f(x)).g(x) \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Dengan memperumum D menjadi sebarang near-ring dan φ menjadi sebarang pemetaan yang memenuhi Persamaan (1.1) dan Persamaan (1.2), maka diperoleh suatu near-ring yang

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015

dilengkapi dengan derivatif. Jika N adalah near-ring semiprima yang dilengkapi dengan derivatif, maka dalam tulisan ini dibahas tentang syarat cukup himpunan bagian $A \subseteq N$ sehingga derivatif setiap anggota A sama dengan 0.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Langkah-langkah penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut: menyelediki dan mempelajari near-0ring, homomorfisma near-ring dan ideal suatu near-ring, menyelidiki dan mempelajari sifat-sifat terkait near-ring prima dan near-ring semiprima beserta idealnya, menyelidiki dan mempelajari mengenai derivatif pada near-ring dilanjutkan tujuan utama yaitu mempelajari mengenai near-ring prima dan near-ring semiprima yang dilengkapi dengan derivatif. Selanjutnya untuk mempelajari ideal prima maupun semiprima dibutuhkan teorema tentang ideal suatu near-ring, teorema fundamental homomorfisma near-ring dan sifat-sifat dasar dari near-ring itu sendiri.

Pada paper Argac (1996) dipelajari tentang near-ring prima dan semiprima yang dilengkapi dengan derivatif. Paper tersebut menjadi acuan utama pada penulisan skripsi ini. Sedangkan untuk mendukung pemahaman tentang near-ring prima maupun semiprima yang belum dijelaskan pada paper Argac, penulis mengacu buku Pilz (1983) dan Kandasamy (2002). Sebagai dasar perbandingan antara sruktur ring dan near-ring penulis mengacu buku Fraleigh (1994), Passman (1991), dan Rotman (2003) .

DASAR TEORI

1. Near-Ring

Dalam bagian ini akan diperkenalkan mengenai near-ring, beserta contoh dan sifat-sifatnya.

Definisi Near-ring. *Himpunan N dengan 2 operasi biner "+" dan "•" disebut **near-ring** jika*

1. *Himpunan $(N,+)$ adalah grup.*
2. *Himpunan $(N,.)$ adalah semi-grup.*
3. *Himpunan $(N,+,.)$ memenuhi salah satu sifat distributif berikut ini:*
   a.Distributif kiri:
   b.Distributif kanan:
   $(\forall n_1,n_2,n_3 \in N)\ (n_1+n_2).n_3 = n_1.n_3 + n_2.n_3$.

Near-ring yang hanya memenuhi aksioma 1, 2 dan 3 bagian (a) disebut **near-ring kiri** (*left near-ring*) dan near-ring yang hanya memenuhi aksioma 1, 2 dan 3 bagian (b) disebut **near-ring kanan** (*right near-ring*). Near-ring merupakan suatu ring dengan aksioma yang diperlemah yaitu sebagai grup aditif tidak harus komutatif dan sifat distributif cukup dipenuhi satu sisi saja.

Near-ring N terhadap operasi "+" dan "." dinotasikan dengan $(N,+,.)$. Selanjutnya dalam pembahasan tulisan ini, jika tidak disyaratkan di awal, yang dimaksud deangan near-ring adalah near-ring kanan. Jika diketahui N near-ring, maka secara implisit di dalamnya melibatkan operasi "+" dan ".".

Contoh Near-ring. Diberikan $(T,+)$ grup. Himpunan $F(T)=\{f \text{ fungsi} \mid f:T \to T\}$ yaitu himpunan semua fungsi dari grup T ke grup T merupakan near-ring terhadap operasi jumlah" $\oplus$ " dan komposisi fungsi "$\circ$" sebagai berikut:

$(\forall f,g \in F(T))(\forall x \in T)$

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (1.3)$$

$(\forall f,g \in F(T)(\forall x \in T)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (1.4)$$

Seperti yang sudah dinyatakan dalam definisi Near-ring bahwa sifat distributif pada near-ring hanya diperlukan satu sisi saja. Untuk elemen yang memenuhi hukum distributif kanan dan sekaligus kiri diberi nama tersendiri, sebagaimana yang dinyatakan dalam definisi berikut.

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015

Definisi Elemen Distributif. *Diberikan near-ring* $(N,+,.)$. *Suatu elemen* d *pada* N *disebut* ***elemen distributif*** *jika dan hanya jika untuk setiap* $n,m \in N$ *berlaku* $d.(n+m) = d.n + d.m.$

Himpunan semua elemen distributif dalam $(N,+,.)$. dinyatakan dengan $N_d = \{d \in N \mid d \text{ elemen distributif}\}$. Jika N merupakan ring maka N pasti near-ring dan dipenuhi $N = N_d$ karena ring memenuhi sifat distributif kiri dan kanan.

Lemma Elemen Distributif. *Himpunan semua elemen distributif suatu near-ring N merupakan himpunan bagian dari bagian simetri nolnya* ($N_d \subseteq N_0$).

Didalam near-ring juga dikenal dengan homomorfisma near-ring sebagai definisi berikut.

Definisi Homomorfisma Near-ring. *Diberikan near-ring* N *dan* N'. *Pemetaan* $h: N \to N'$ *disebut homomor-fisma near-ring. Jika untuk setiap* $m,n \in N$ *berlaku:*

1) $h(m+n) = h(m) + h(n).$
2) $h(m.n) = h(m).h(n).$

Untuk selanjutnya homomorfisma near-ring yang injektif disebut *monomorfisma*, homomorfisma near-ring yang surjektif disebut *epimorfisma*, sedangkan *isomorfisma* adalah homomorfisma near-ring yang bijektif.

Teorema Homomorfisma Near-ring. *Jika* $h: N \to N'$ *merupakan homomorfisma near-ring maka untuk setiap* $n \in N$ *berlaku*

1). $h\ (0_N) = 0_{N'}$.
2). $h\ (-n) = -h\ (n)$.

2. Near-Ring Prima

Sebelum membahas near-ring prima, terlebih dahulu dibahas ideal prima yang merupakan syarat utama terbentuknya near-ring prima.

Definisi Ideal Prima. *Suatu ideal* P *dari near-ring* N *disebut ideal prima jika untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *berlaku*

$$I.J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \vee J \subseteq P.$$

Contoh Ideal Prima. *Diberikan near-ring* $(\mathbb{Z},+,.)$, *maka* $\{0\}$ *adalah ideal prima.*

Teorema Ekuivalensi Ideal Prima. *Diberikan ideal* P *pada near-ring* N. *Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

1) *Ideal* P *adalah prima.*
2) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $I.J \subseteq P$ *maka* $I \subseteq P$ *atau* $J \subseteq P$.
3) *Untuk setiap* $i,j \in N$, *jika* $i \notin P$ *dan* $j \notin P$, *maka* $\langle i \rangle . \langle j \rangle \not\subseteq P$.
4) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $P \subset I$ *dan* $P \subset J$, *maka* $I.J \not\subseteq P$.
5) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $I \not\subseteq P$ *dan* $J \not\subseteq P$, *maka* $I.J \not\subseteq P$.

Berikut akan diberikan definisi near-ring prima dan beberapa teorema yang terkait dengan near-ring prima

Definisi Near-ring Prima. *Near-ring* N *disebut prima jika* $\{0\}$ *adalah ideal prima.*

Contoh Near-ring Prima. *Himpunan* $(\mathbb{Z},+,.)$ *adalah near-ring prima.*

Teorema Near-ring Prima. *Diberikan suatu near-ring* N. *Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

1) *Near-ring* N *adalah prima.*
2) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $I.J \subseteq \{0\}$ *maka* $I \subseteq \{0\}$ *atau* $J \subseteq \{0\}$.
3) *Untuk setiap* $i,j \in N$, *jika* $i \notin \{0\}$ *dan* $j \notin \{0\}$, *maka* $\langle i \rangle . \langle j \rangle \not\subseteq \{0\}$.
4) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $\{0\} \subset I$ *dan* $\{0\} \subset J$, *maka* $I.J \not\subseteq \{0\}$.
5) *Untuk setiap ideal* I *dan* J *pada* N, *jika* $I \not\subseteq \{0\}$ *dan* $J \not\subseteq \{0\}$, *maka* $I.J \not\subseteq \{0\}$.

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015

Teorema Ekuivalensi Ideal Prima Dan Nearing Prima. *Diberikan ideal I pada N. Pernyataan berikut ekuivalen:*

Himpunan I adalah ideal prima

$\Leftrightarrow$

N/I adalah near-ring prima.

3. Near-ring Semiprima

Sebelum membahas near-ring semi-prima terlebih dahulu dibahas mengenai ideal semi-prima yang merupakan bentuk umum dari ideal prima.

Definisi Ideal Semiprima. *Suatu ideal S dari near-ring N disebut semiprima, jika untuk setiap ideal I pada N, berlaku*

$$I.I = I^2 \subseteq S \;\Rightarrow I \subseteq S.$$

Contoh Ideal Semiprima. *Jika Z merupakan near-ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan biasa, maka $\{0\}$ adalah ideal semiprima.*

Teorema Ideal Semiprima. *Diberikan ideal S pada N. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(a) *Ideal S adalah semiprima.*
(b) *Untuk setiap ideal I pada N, jika $I^2 \subseteq S$ maka $I \subseteq S$.*
(c) *Untuk setiap $n \in N$, jika $<n>^2 \subseteq S$ maka $n \in S$.*
(d) *Untuk setiap ideal I pada N, jika $S \subset I$ maka $I^2 \not\subseteq S$.*
(e) *Untuk setiap ideal I pada N, Jika $I \not\subseteq S$ maka $I^2 \not\subseteq S$.*

Teorema Ekuivalensi Ideal Semiprima. *Diberikan ideal I dan S pada N dengan $I \subseteq S$. Jika pemetaan $\pi : N \to N/I = \overline{N}$ adalah epimorfisma, maka berlaku pernyataan berikut:*

Himpunan S adalah ideal semiprima

$\Leftrightarrow$

$\pi(S) \subseteq N/I$ adalah near-ring semiprima.

Berikut akan diberikan definisi near-ring semiprima dan beberapa teorema yang terkait dengan near-ring semiprima.

Definisi Near-ring Semiprima. *Near-ring N disebut semiprima jika $\{0\}$ adalah ideal semiprima.*

Teorema Near-ring Semiprima. *Diberikan near ring N. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(a) *Near ring N adalah semiprima.*
(b) *Untuk setiap ideal I pada N, jika $I^2 \subseteq \{0\}$ maka $I \subseteq \{0\}$.*
(c) *Untuk setiap $n \in N$, jika $<n>^2 \subseteq \{0\}$ maka $n \in \{0\}$.*
(d) *Untuk setiap ideal I pada N, jika $S \subset \{0\}$ maka $I^2 \not\subseteq \{0\}$.*
(e) *Untuk setiap ideal I pada N, Jika $I \not\subseteq \{0\}$ maka $I^2 \not\subseteq \{0\}$*

Teorema Ekuivalensi Near-ring Semiprima. *Diberikan near-ring N. Pernyataan berikut ekuivalen:*

Untuk setiap ideal I pada N, jika $I^2 = \{0\}$ maka $I = \{0\}$

$\Leftrightarrow$

Untuk setiap $s \in N$, jika $s.N.s = 0$ maka $s = 0$.

4. Derivatif pada Near-ring

Definisi Derivatif pada Near-ring. *Diberikan near-ring N. Pemetaan $d : N \to N$ disebut derivatif pada N, jika untuk setiap $x, y \in N$ berlaku*

1. $d(x+y) = d(x) + d(y)$
2. $d(x.y) = x.d(y) + d(x).y$

Dengan demikian dari definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa derivatif pada near-ring N merupakan suatu endomorfisma grup aditif dengan operasi pergandaannya didefinisikan seperti aksioma 2 diatas.

Contoh Derivatif Near-ring. Diberikan near-ring bagian simetri nol $(N_0, +, .)$. Himpunan $d : N_0 \to N_0$ merupakan himpunan semua fungsi dari near-ring N_0 ke dirinya sendiri yang didefinisikan $d(\alpha) = 0$ untuk setiap $\alpha \in N_0$.

Definisi Homomorfisma Dan Anti-homomorfisma.

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015

Diberikan near-ring N dengan $S \subseteq N$ dan d derivatif pada N. Untuk setiap $x, y \in S$ berlaku:

1. *Jika $d(x.y) = d(x).d($ maka d disebut homomorfisma pada S.*
2. *Jika $d(x.y) = d(y).d(x)$ maka d disebut anti-homomorfisma pada S.*

Lemma Derivatif Near-ring. *Jika N adalah near-ring dan d derivatif pada N maka untuk untuk setiap $x, y, c \in N$ berlaku:*

$$c.\{y.d(x) + d(y).x\} = c.y.d(x) + c.d(y).x$$

Lemma Homorfisma Dan Antihomomorfisma. *Diberikan near-ring N dan A subsemigrup N terhadap operasi pergandaan. Untuk setiap $x, y \in A$ berlaku*

1. *Jika d homomorfisma di A, maka* $d(y).x.d(y) = y.x.d(y) = d(y).x.y$
2. *Jika d anti-homomorfisma di A, maka* $d(y).x.d(y) = d(y).y.x = x.y.d(y)$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil 1

Teorema Derivatif Near-ring semiprima. *Diketahui N adalah zero simetri near-ring semiprima dan d derivatif pada N. Diberikan A subsemigrup N yang memuat $0 \in A$, $A \subseteq N$ dan $A.N \subseteq A$. Jika d homomorfisma atau anti-homomorfisa di A, maka $d(A) = 0$*

Hasil 2

Teorema Derivatif Near-ring Prima. *Diketahui N near-ring semiprima dan d derivatif pada N. Diberikan A subsemigrup N yang memuat $0 \in A$, $A \subseteq N$ dan $A.N \subseteq A$. Jika d anti-homo-morfisma di N maka $d(N) = \{0\}$.*

Pembahasan 1

Diketahui d homomorfisma di A. Akan ditunjukkan bahwa $d(A) = 0$. *U*ntuk setiap $x, y \in A$ berlaku

$$d(y).x.d(y) = d(y).x.y$$

Kemudian kedua ruas dikenakan perkalian kanan dengan $''d(z)'$ untuk setiap $z \in A$, sehingga diperoleh persamaan

$$d(y).x.d(y).d(z) = d(y).x.y.d(z)$$
$$d(y).x.d(y.z) = d(y).x.y.d(z)$$
$$d(y).x.\{y.d(z) + d(y).z\} = d(y).x.y.d(z)$$
$$d(y).x.y.d(z) + d(y).x.d(y).z = d(y).x.y.d(z)$$

Dengan kanselasi kiri yang dikenakan pada diperoleh:

$$d(y).x.d(y).z = 0$$

subsitusi x dengan $x.r$ dengan $x \in A$ dan $r \in N$ diperoleh

$$d(y).x.r.d(y).z = 0$$

akibatnya $d(y).x.N.d(y).z = \{0\}$. Khususnya untuk $x = z$ diperoleh

$$d(y).x.N.d(y).x = \{0\}$$

karena N near-ring semiprima, akibatnya

$$d(y).x = 0. \qquad (*)$$

Subsitusi y dengan $y.r$ dengan $y \in A$ dan $r \in N$ diperoleh persamaan

$$d(y.r).x = 0$$
$$\{y.d(r) + d(y).r\}.x = 0$$
$$y.d(r).x + d(y).r.x = 0$$

kedua ruas dikenakan perkalian kiri dengan $"d(z)"$ untuk setiap $z \in A$, sehingga diperoleh persamaan:

$$d(z).\{y.d(r).x + d(y).r.x\} = d(z).0.$$

Sehingga menjadi

$$d(z).y.d(r).x + d(z).d(y).r.x = 0.$$

berakibat

$$0.d(r).x + d(z).d(y).r.x = 0$$
$$0 + d(z).d(y).r.x = 0$$
$$d(z).d(y).r.x = 0.$$

Karena d homomorfisma di A, akibatnya diperoleh persamaan $d(z.y).r.x = 0$, $\{z.d(y) + d(z).y\}.r.x = 0$. Karena berlaku hukum distributif kanan, maka diperoleh

$$z.d(y).r.x + d(z).y.r.x = 0$$
$$z.d(y).r.x + 0.r.x = 0$$
$$z.d(y).r.x + 0 = 0.$$

Akibatnya diperoleh persamaan

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015

$$z.d(y).r.x = 0.$$

Karena berlaku untuk setiap $r \in N$ berakibat $z.d(y).N.x = \{0\}$, khususnya untuk $x = z.d(y)$ diperoleh

$$z.d(y).N.z.d(y) = \{0\}.$$

Karena himpunan N near-ring semiprima, akibatnya:

$$z.d(y) = 0 = z.r.d(y) = z.d(r).d(y) \text{ (**)}$$

Dengan mengombinasikan Peramaan (*) dan (**) diperoleh persamaan

$$y.d(x) + d(y).x = 0$$

$$d(y.x) \qquad = 0.$$

Subsitusi y dengan $x.r$ maka diperoleh $d(x.r.x) = 0$. Karena d homomorfisma di A, maka diperoleh persamaan

$$d(x.r.x) = d(x.r).d(x) \qquad = 0$$

$$\{x.d(r) + d(x).r\}.d(x) \qquad = 0$$

$$x.d(r).d(x) + d(x).r.d(x) = 0. (***)$$

Dengan melihat Persamaan (**) berakibat Persamaan (***) menjadi

$$0 + d(x).r.d(x) = 0$$

$$d(x).r.d(x) \qquad = 0.$$

Karena berlaku untuk sebarang $r \in N$, maka $d(x).N.d(x) = \{0\}$. Karena N near-ring semiprima berakibat $d(x) = \{0\}$ dan karena x sebarang anggota A berakibat $d(A) = \{0\}$. ■

Pembahasan 2

Dari Pembahasan 1 diperoleh $d(a) = 0$. Untuk setiap $a \in A$. Pastilah juga berlaku $d(a.r) = 0$ untuk setiap $a \in A$ dan $r \in N$.

$$d(a.r) \qquad = 0$$

$$a.d(r) + d(a).r = 0$$

$$a.d(r) + 0.r \qquad = 0$$

$$a.d(r) + 0 \qquad = 0$$

$$a.d(r) \qquad = 0.$$

Subsitusi a dengan $a.s$ untuk setiap $a \in A$ dan $s \in N$ pada Persamaan (4.2.42), sehingga diperoleh persamaan $a.s.d(r) = 0$. Karena berlaku untuk sebarang $s \in N$ berakibat $a.N.d(r) = 0$. Karena N near-ring prima berakibat $a = 0$ atau $d(r) = 0$ dan karena A tidak kosong diperoleh $d(r) = 0$ untuk setiap $r \in N$. ■

PENUTUP

Kesimpulan

Sifat-sifat prima dan semiprima dalam near-ring dapat digunakan untuk menentukan sifat derivatif pada near-ring yang dilengkapi dengan derivatif. Selanjutnya dengan derivatif pada near-ring $(N, +, .)$ dan homomorfisma atau anti-homomorfisma di $A \subseteq N$. Dapat dibuktikan suatu teorema utama. Diketahui N adalah near-ring semiprima dan d derivatif pada N. Diberikan A subsemigrup N yang memuat $0 \in A$, $A \subseteq N$ dan $A.N \subseteq A$. Jika d homomorfisma di A atau d anti-homomorfisma di A maka $d(A) = 0$. Teorema ini juga berlaku jika diketahui N adalah near-ring prima.

DAFTAR RUJUKAN

Argac, N. , 1996, *On Prime and Semiprime Near-Rings with Derivations, paper*, Ege Univer-sity, Science Faculty, Department of mathematics, Turkey.

Fraleigh, J., B., 1994 , *A First Course in Abstract Algebra*, Addison -Wesley Publishing Company inc., New York.

Kandasamy, W. B. V., 2002, *Smarandace Near-rings,* Indian Institute of Technology, Department of Mathematics, India.

Passman, D. S., 1991, *A Course in Ring Theory*, Wadsworth, Inc., Belmont, California.

Pilz, G., 1983, *Near- ring the Theory and its Application* , North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford University, New York.

Rotman, J. J., 2003, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, New York.

Diterima : 16-07-2015, Direvisi : 16-08-2015, Disetujui : 18-09-2015